Exercices : 110

111

112

113

117

118

119

Exercice 110

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$

2 $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$

3 $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$

4 $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

$\boxed{1}$ C.E. $4-2x > 0$ et $x-1>0$

$\iff x < 2$ et $x > 1$

$D_f =]1;2[$

$\forall x \in D_f$: $\ln(4-2x) = \ln(x-1) \iff 4-2x = x-1$

$\iff 3x = 5$

$\iff x = \frac{5}{3}$ $(\in D_f)$

$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

$\boxed{2}$ C.E. : $2x^2-10x+8>0$ et $3x^2-3x-18>0$

$\iff x^2-5x+4>0$ et $x^2-x-6>0$

$\Delta_1 = 5^2-4\cdot1\cdot4 = 9 \; (=3^2)$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{5-3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{5+3}{2} = 4$

$\Delta_2 = 1^2-4\cdot1\cdot(-6) = 25 \; (=5^2)$

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$

$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

Forme factorisée :

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Donc :

$\iff (x-1)(x-4)>0$ et $(x+2)(x-3)>0$

T.d.S :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$I_1 =]-\infty ; 1[\cup]4 ; +\infty[$ $\qquad$ $I_2 =]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$

$D_f = I_1 \cap I_2 =]-\infty ; -2[\cup]4 ; +\infty[$

$\underline{\forall x \in D_f}$:

$\ln(2x^2 - 10x + 8) = \ln(3x^2 - 3x - 18) \iff 2x^2 - 3x^2 - 10x + 3x + 8 + 18 = 0$

$\iff -x^2 - 7x + 26 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 26$

$= 153$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{7 - \sqrt{153}}{-2} \simeq 2{,}684 \ldots \; (\notin D_f)$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{7 + \sqrt{153}}{-2} \simeq -9{,}684 \ldots \; (\in D_f)$

$S = \left\{ \dfrac{7 + \sqrt{153}}{-2} \right\}$

$\boxed{3}$ C.E. : $x > 0$

$D_f = \mathbb{R}_+^*$

$\underline{\forall x \in D_f}$: $\quad 2(\ln(x))^2 - 5(\ln(x)) - 3 = 0$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons : $\ln(x) = t$

$2t^2 - 5t^2 - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$= 5^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3$

$= 49 \; (= 7^2)$ (deux solutions réeles)

$t_1 = \dfrac{5 - 7}{2 \cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

$t_2 = \frac{5+7}{2 \cdot 2} = 3$

Comme $t = \ln(x)$: $\ln(x) = 3$ ou $\ln(x) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^3$ ou $x = e^{-\frac{1}{2}}$

$\in D_f$ $\quad$ $\in D_f$

$S = \left\{ e^{-\frac{1}{2}} ; e^3 \right\}$

$\boxed{4}$

C.E. : $x > 0$

$D_f = \mathbb{R}_+^*$

$\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons : $t = \ln(x)$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$= 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$= 1 \ (>0)$ (deux solutions dans $\mathbb{R}$)

$t_1 = \frac{3-1}{2 \cdot 1} = 1$

$t_2 = \frac{3+1}{2 \cdot 1} = 2$

Comme $t = \ln(x)$: $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = 2$

$\Leftrightarrow x = e$ ou $x = e^2$

$\in D_f$ $\quad$ $\in D_f$

$S = \{ e ; e^2 \}$

Exercice 111

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\ln\left(x^2-1\right)=\ln(3)$

2 $\ln\left(4x+3\right)-\ln\left(3x\right)=0$

3 $\ln\left(x^3+8x^2\right)=\ln\left(5x+84\right)$

4 $\ln\sqrt{7x+3}-\ln\left(5x+1\right)=0$

$\boxed{1}$ C.E. : $x^2-1>0 \iff x^2>1$

$\iff x>1$ ou $x<-1$

$D=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$\forall x\in D$: $\ln(x^2-1)=\ln(3) \iff x^2-1=3$

$\iff x^2=4$

$\iff x=2$ ou $x=-2$

$S=\{-2;2\}$

$\boxed{2}$ C.E. : $4x+3>0$ et $3x>0$

$\iff x>-\frac{3}{4}$ et $x>0$

$D=\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in D$: $\ln(4x+3)-\ln(3x)=0 \iff 4x+3=3x$

$\iff x=-3 \quad (\notin D_f)$

$S=\emptyset$

$\boxed{3}$ C.E. : $x^3+8x^2>0$ et $5x+84>0$

$\iff x^2(x+8)>0$ et $x>-\frac{84}{5}$

$\iff x\neq 0$ ou $x>-8$ et $x>-\frac{84}{5}=-16{,}8$

$D=\left]-8;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

$\forall x\in D$: $\ln(x^3+8x^2)=\ln(5x+84) \iff x^3+8x^2=5x+84$

$\Longleftrightarrow x^3+8x^2-5x-84=0$

Soit : $P(x) = x^3+8x^2-5x-84 = 0$

<u>Schéma de Horner :</u>

Comme $P(x)=0$

	1	8	-5	-84
3		3	33	84
	1	11	28	0

Donc : $P(x) = (x-3)(x^2+11x+28)$

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a \cdot c$$
$$= 121 - 4\cdot 1 \cdot 28$$
$$= 9 \quad (=3^2)$$ (deux solutions dans $\mathbb{R}$)

$x_1 = \frac{-11-3}{2\cdot 1} = -7 \quad (\in D)$

$x_2 = \frac{-11+3}{2\cdot 1} = -4 \quad (\in D)$

et $x_3 = 3 \quad (\in D)$

$S = \{-7 ; -4 ; 3\}$

$\boxed{4}$ $\ln(\sqrt{7x+3}) = \ln(5x+1) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ln(7x+3) = \ln(5x+1)$ ⊛

C.E. : $7x+3>0$ et $5x+1>0$

$\Longleftrightarrow x > -\frac{7}{3}$ et $x > -\frac{1}{5}$

$D = \left]-\frac{1}{5} ; +\infty\right[$

<u>$\forall x \in D$</u> : ⊛ $\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ln(7x+3) = \ln(5x+1)$

$\Longleftrightarrow \quad 7x+3 = (5x+1)^2$

$\Longleftrightarrow 7x+3 = 25x^2+10x+1$

$\Longleftrightarrow 25x^2+3x-2=0$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$= 9 - 4 \cdot 25 \cdot (-2)$$
$$= 209 \ (>0) \text{ deux solutions dans } \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{209}}{50} = -0{,}349\ldots \quad (\notin D)$$

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{209}}{50} = 0{,}229\ldots \quad (\in D)$$

$$S = \left\{ \frac{-3+\sqrt{209}}{50} \right\}$$

Exercice 112

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\ln(x+1) + \ln(4x-1) = \ln(2x+1)$

2 $\ln(x) + \ln(x^2-9) = \ln(4) + \ln(x+3)$

3 $\ln(x) + \ln(x^2+5x-2) = \ln(2) + \ln(5)$

$\boxed{1}$ C.E. : $x+1>0$ et $4x-1>0$ et $2x+1>0$

$\Leftrightarrow x > -1$ et $x > \frac{1}{4}$ et $x > -\frac{1}{2}$

$D = \left]\frac{1}{4}\,; +\infty\right[$

$\forall x \in D$: $\ln(x+1) + \ln(4x-1) = \ln(2x+1)$

$\Leftrightarrow \ln\left[(x+1)(4x-1)\right] = \ln(2x+1)$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x-1) = (2x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - x + 4x - 1 = 2x+1$

$\Leftrightarrow 4x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$$
$$= 1^2 - 4\cdot 4\cdot(-2)$$
$$= 33 \ (>0) \quad \text{deux solutions dans } \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{8} < 0 \ (\notin D) \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \simeq 0{,}6 \ (\in D)$$

$$S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \right\}$$

$\boxed{2}$ C.E.: $x > 0$ et $x^2-9>0$ et $x+3>0$

$\Leftrightarrow x>0$ et $x>3$ ou $x<-3$ et $x>-3$

$D =]3;+\infty[$

$\underline{\forall x \in D:}$ $\ln(x) + \ln(x^2-9) = \ln(4) + \ln(x+3)$

$\Leftrightarrow \ln\left[(x)(x^2-9)\right] = \ln\left[4(x+3)\right]$

$\Leftrightarrow x(x^2-9) = 4(x+3)$

$\Leftrightarrow x(x+3)(x-3) = 4(x+3)$

$\Leftrightarrow (x+3)\left[x(x-3)-4\right] = 0$

$\Leftrightarrow x=-3$ ou $x(x-3)-4=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ ou $x^2-3x-4=0$

$(\in D)$

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$$
$$= 9 - 4\cdot 1\cdot(-4)$$
$$= 5^2 \ (>0) \quad \text{deux solutions dans } \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad (\in D)$$

$$x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$\mathcal{S} = \{4\}$

$\boxed{3}$ C.E. : $x > 0$ et $x^2+5x-2 > 0$

$$\Delta = 5^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2$$
$$= 33 \ (>0) \quad \text{deux solutions dans } \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{33}}{2} = -5{,}372\ldots$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2} = 0{,}372\ldots$$

$$D = \left]x_2 ; +\infty\right[= \left]\frac{-5+\sqrt{33}}{2} ; +\infty\right[$$

<u>$\forall x \in D$:</u>

$$\ln(x) + \ln(x^2+5x+2) = \ln(2) + \ln(5) \iff \ln\left[x(x^2+5x+2)\right] = \ln(10)$$
$$\iff x^3+5x^2+2x-10 = 0$$
$$\iff x^2(x+5) - 2(x+5) = 0$$
$$\iff (x+5)(x^2-2) = 0$$
$$\iff x = -5 \text{ ou } x^2 = 2$$
$$\iff x = -5 \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$
$$(\notin D) \qquad (\notin D) \qquad (\in D)$$

$\mathcal{S} = \{\sqrt{2}\}$

Exercice 113

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\ln\sqrt{2x-1} + \ln\sqrt{x+1} = \ln(x+4)$

2 $\ln\dfrac{x}{x+7} = \ln\dfrac{x-3}{x+2}$

3 $\ln\sqrt{4x-1} - \ln\sqrt{x^2-25} = \ln 2$

4 $\ln\sqrt{\dfrac{x-2}{x+6}} = \ln 3 + \ln\sqrt{x}$

$\boxed{1}$ $2x-1 > 0$ et $x+1 > 0$ et $x+4 > 0$

$\iff x > \frac{1}{2}$ et $x > -1$ et $x > -4$

$D = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$\forall x \in D$:
$$\frac{1}{2}\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) = \ln(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left\{\ln\left[(2x-1)(x+1)\right]\right\} = \ln(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-x-1 = x^2+8x+16$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x-17=0$$

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c$$
$$= 49+4\cdot 1\cdot 17$$
$$= 117 \quad (>0) \text{ deux solutions dans } \mathbb{R}$$
$$= 3\sqrt{13}$$

$$x_1 = \frac{7-3\sqrt{13}}{2} = -1{,}908\ldots \quad (\notin D)$$

$$x_2 = \frac{7+3\sqrt{13}}{2} = 8{,}908\ldots \quad (\in D)$$

$$S = \left\{\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right\}$$

$\boxed{2}$ C.E. : $\dfrac{x}{x+7} > 0$ et $\dfrac{x-3}{x+2} > 0$

T.d.s.

	$-\infty$	-7		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x}{x+7}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$I_1 = \left]-\infty ; -7\right[\cup \left[0 ; +\infty\right[$

T.d.s

	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-3}{x+2}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$I_2 = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left[3 ; +\infty\right[$

$D = I_1 \cap I_2 =]-\infty; -7[\cup [3; +\infty[$

$\forall x \in D$: $\ln\left(\frac{x}{x+7}\right) = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \Leftrightarrow x(x+2) = (x-3)(x+7)$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2x = \cancel{x^2}+7x-3x-21$

$\Leftrightarrow -2x+21=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{21}{2} \quad (\in D)$

$S = \left\{\frac{21}{2}\right\}$

$\boxed{3}$ C.E. : $4x-1>0$ et $x^2-25>0$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$ et $x > 5$ ou $x < -5$

$D =]5; +\infty[$

$\forall x \in D$: $\ln(\sqrt{4x-1}) - \ln(\sqrt{x^2-25}) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{\frac{4x-1}{x^2-25}}\right) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow \frac{4x-1}{x^2-25} = 4$

$\Leftrightarrow 4x-1 = 4x^2-100$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x-99=0$

$\Delta = 4^2+4\cdot4\cdot99$

$= 1600 \ (>0)$ deux solutions dans $\mathbb{R}$

$= 40^2$

$x_1 = \frac{4-40}{8} = -\frac{9}{2} \quad (\notin D)$

$x_2 = \frac{4+40}{8} = \frac{11}{2} \quad (\in D)$

$S = \left\{\frac{11}{2}\right\}$

$\boxed{4}$ C.E. $\dfrac{x-2}{x+6} > 0$ et $x > 0$

T.d.s :

	$-\infty$	-6		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+6$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x-2}{x+6}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$D =]2 ; +\infty[$

$\forall x \in D$: $\frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+6}\right) = \ln(3) + \ln(\sqrt{x})$

$\iff \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+6}\right) = \ln(3\sqrt{x})$

$\iff \cancel{\frac{1}{2}}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+6}\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\ln(9x)$

$\iff \dfrac{x-2}{x+6} = 9x$

$\iff x-2 = 9x(x+6)$

$\iff x-2 = 9x^2 + 54x$

$\iff 9x^2 + 53x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 53^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2$

$= 2737 \ (>0)$ deux solutions dans $\mathbb{R}$

$x_1 = \dfrac{-53 - \sqrt{2737}}{18} = -5,85\ldots \quad (\notin D)$

$x_2 = \dfrac{-53 + \sqrt{2737}}{18} = -0,037\ldots \quad (\notin D)$

$S = \emptyset$

Exercice 117

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $6(\ln x)^2 + 7\ln x - 3 = 0$

2 $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$

3 $2[\ln(2x)]^2 - 5\ln(2x) - 3 \leq 0$

4 $(\ln x)^2 + 2\ln x - 15 > 0$

$\boxed{1}$ $6[\ln(x)]^2 + 7\ln(x) - 3 = 0$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons $\ln(x) = N$

$$6N^2 + 7N - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3)$$
$$= 122 \quad (= 11^2)$$

$$N_1 = \frac{-7-11}{2 \cdot 6} = -\frac{3}{2}$$

$$N_2 = \frac{-7+11}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$$

Donc : $\ln(x) = -\frac{3}{2}$ et $\ln(x) = \frac{1}{3}$

$\iff x = e^{-\frac{3}{2}}$ et $x = e^{\frac{1}{3}}$

$\iff x = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ et $x = \sqrt[3]{e}$

$\iff x = \frac{\sqrt{e}}{e^2}$ et $x = \sqrt[3]{e}$

$\boxed{2}$ $[\ln(x)]^3 - 2[\ln(x)]^2 - \ln(x) + 2 = 0 \quad (= P)$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons $\ln(x) = N$

Donc : $N^3 - 2N^2 - N + 2 = 0$

$\Leftrightarrow N^2(N-2)-(N-2)=0$

$\Leftrightarrow (N^2-1)(N-2)=0$

$\Leftrightarrow N^2-1=0$ ou $N-2=0$

$\Leftrightarrow N=1$ ou $N=2$ ou $N=-1$

Comme $\ln(x)=N$, alors : $x=e$ ou $x=e^2$ ou $x=e^{-1}$

$S=\left\{ \frac{1}{e}; e; e^2 \right\}$

$\boxed{3}$ $2[\ln(2x)]^2-5\ln(2x)-3\leq 0$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons : $\ln(2x)=N$

$2N^2-5N-3\leq 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 25-4\cdot 2\cdot(-3)$

$= 49 \ (=7^2)$

$N_1 = \frac{5-7}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

$N_2 = \frac{5+7}{2\cdot 2} = 3$

Comme $\ln(2x)=N$:

$N_1 = \ln(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

$N_2 = \ln(2x) = 3 \Leftrightarrow 2x = e^3$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^3$

T.d.S

	$-\infty$		$\frac{1}{2\sqrt{e}}$		$\frac{1}{2}e^3$		$+\infty$
P		+	0	−	0	+	

$x \leq 0 \iff \left]\frac{1}{2\sqrt{e}} ; \frac{1}{2}e^3\right[$

$\boxed{4}$ $[\ln(x)]^2 + 2\ln(x) - 15 > 0$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Pasons : $\ln(x) = V$

$V^2 + 2V - 15 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)$

$= 64$

$=$

$V_1 = \frac{-2-8}{2 \cdot 1} = -5$

$V_2 = \frac{-2+8}{2 \cdot 1} = 3$

Comme $V = \ln(x)$: $\ln(x) = -5$ ou $\ln(x) = 3$

$\iff x = e^{-5}$ ou $x = e^3$

T.d.S :

	$-\infty$		e^{-5}		e^3		$+\infty$
$[\ln(x)]^2 + 2\ln(x) - 15$		+	0	−	0	+	

$S =]-\infty ; e^{-5}[\cup]e^3 ; +\infty[$

Exercice 118

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $e^{x-1} < 2$

2 $(e^x + 1)(e^x - 4) \leq 0$

3 $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$

4 $\frac{1}{2} \leq e^x \leq 2$

$\boxed{1}$ $e^{x-1} < 2 \iff x - 1 < \ln(2)$

$\iff x < \ln(2) - 1$

$S =]-\infty \,;\, \ln(2) - 1[$

$\boxed{2}$ $\underbrace{(e^x + 1)}_{>0}(e^x - 4) \leq 0$

$\Rightarrow e^x - 4 \leq 0 \iff e^x \leq 4$

$\iff x \leq \ln(4)$

T.d.s :

x	$-\infty$		$\ln(4)$		$+\infty$
$e^x - 4$		$-$	0	$+$	

$S =]-\infty \,;\, \ln(4)[$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$e^{\frac{x+1}{x}} > 3 \iff \frac{x+1}{x} > \ln(3)$

$\iff$

$\boxed{4}$ $\frac{1}{2} \leq e^x \leq 2 \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq x \leq \ln(2)$

$\iff -\ln(2) \leq x \leq \ln(2)$

$S = [-\ln(2) \,;\, \ln(2)]$

Exercice 119

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $(x-1)e^{\ln(2x+3)} = x\ln\left(e^{4x+1}\right)$

2 $e^{\ln\frac{x+1}{x-3}} < \ln e^{-5x}$

3 $\ln\dfrac{e^{6x-1}}{e^{9x+2}} = x\ln e^{1-3x}$

4 $e^{2\ln(4x+5)} > \ln e^{(7x+3)^2}$

$\boxed{1}$ $(x-1)\,e^{\ln(2x+3)} = x\ln\left(e^{4x+1}\right)$

C.E. $2x+3>0$ et $e^{4x+1}>0$

$\iff x > -\frac{3}{2}$ ↳ toujours vrai

$D = \left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

$\forall x \in D$: $(x-1)\,e^{\ln(2x+3)} = x\ln\left(e^{4x+1}\right) \iff (x-1)(2x+3) = x(4x+1)$

$\iff 2x^2+3x-2x-3 = 4x^2+x$

$\iff -2x^2-3=0$

$\iff x^2 = -\frac{3}{2}$

impossible dans $\mathbb{R}$

$S = \emptyset$

$\boxed{2}$ $e^{\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)} < \ln\left(e^{-5x}\right)$

C.E. $\frac{x+1}{x-3} > 0$ et $e^{-5x} > 0$

↳ toujours vrai

T.d.s :

	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$		$-$	$\|$	$+$

Donc : $D = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[$

$= \mathbb{R} \setminus \left]-1\,;3\right[$

$\forall x \in D$: $e^{\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)} < \ln\left(e^{-5x}\right) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} < -5x$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5x(x-3)}{x-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5x^2-15x}{x-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-14x+1}{x-3} < 0$$

<u>Recherche des racines</u> :

$$5x^2-14x+1=0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= 196-4\cdot 5\cdot 1$$
$$= 176 \ (>0) \text{ deux solutions réels}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{14-\sqrt{176}}{2\cdot 5} = \frac{7-2\sqrt{11}}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{14+\sqrt{176}}{2\cdot 5} = \frac{7+2\sqrt{11}}{5}$$

<u>T.d.S</u> :

	$-\infty$		$\frac{7-2\sqrt{11}}{5}$		$\frac{7+2\sqrt{11}}{5}$		3		$+\infty$
$5x^2-14x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x^2-14x+1}{x-3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

a exclure, car $\notin D$

<u>Finalement</u> : $\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{7+2\sqrt{11}}{5}\right[$

$\boxed{3}$ $\ln\left(\frac{e^{6x-1}}{e^{9x+2}}\right) = x\ln\left(e^{1-3x}\right)$

C.E. : $\underbrace{\dfrac{e^{6x-1}}{e^{9x+2}} > 0 \quad \text{et} \quad e^{1-3x} > 0}_{\text{toujours vrai}}$

$D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \ln\left(\dfrac{e^{6x-1}}{e^{9x+2}}\right) = x \cdot \ln\left(e^{1-3x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(e^{6x-1}\right) - \ln\left(e^{9x+2}\right) = x \cdot \ln\left(e^{1-3x}\right)$

$\Leftrightarrow 6x - 1 - 9x - 2 = x - 3x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 3$

$= 52 \ (>0)$ deux solutions réels

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{4 - \sqrt{52}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 - \sqrt{13}}{3}$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{4 + \sqrt{52}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{3}$

Donc : $\quad S = \left\{ \dfrac{2 - \sqrt{13}}{3} ; \dfrac{2 + \sqrt{13}}{3} \right\}$

$\boxed{4}$ $\quad e^{2\ln(4x+5)} > \ln\left(e^{(7x+3)^2}\right)$

C.E. $\quad 4x + 5 > 0 \quad$ et $\quad e^{(7x+3)^2} > 0$

$\hookrightarrow$ toujours vrai

$\Leftrightarrow x > -\frac{5}{4}$

$D = \left] -\frac{5}{4} ; +\infty \right[$

$\forall x \in D : \quad e^{2\ln(4x+5)} > \ln\left(e^{(7x+3)^2}\right) \Leftrightarrow e^{\ln\left[(4x+5)^2\right]} > \ln\left(e^{(7x+3)^2}\right)$

$\Leftrightarrow (4x+5)^2 > (7x+3)^2$

$\Leftrightarrow 16x^2 + 40x + 25 > 49x^2 + 42x + 9$

$\Leftrightarrow -33x^2 - 2x + 16 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot ac$$
$$= 2^2 - 4 \cdot (-33) \cdot 16$$
$$= 2116 \quad (>0) \text{ deux solutions réels}$$
$$= 46^2$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-46}{2\cdot(-33)} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+46}{2\cdot(-33)} = -\frac{8}{11}$$

T.d.S :

	$-\infty$		$-\frac{8}{11}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-33x^2-2x+16$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-\frac{8}{11} ; \frac{2}{3}\right[$$